IL PRINCIPIO DI INDUZIONE COMPLETA

L'induzione è il procedimento che consiste nel passare da affermazioni di carattere particolare ad affermazioni di carattere generale. Il procedimento inverso, dal generale al particolare, è invece chiamato *deduzione.*

Un esempio di affermazione di carattere generale è "tutti i numeri che terminano con 5 sono divisibili per 5", mentre un'affermazione di carattere particolare è "145 è divisibile per 5". Dalla prima affermazione posso allora dedurre che 145 è multiplo di 5. Questo ci sembra logicamente impeccabile. Assai più fragile, dal punto di vista logico, è invece il procedimento dell'induzione. Dal fatto che 145 è multiplo di 5 posso concludere, per induzione, che tutti i numeri che terminano per 5 sono multipli di 5 (vero!), ma potrei anche concludere che tutti i numeri di tre cifre sono multipli di 5 (falso!) o che tutti i numeri che iniziano con 1 sono multipli di 5 (falso!).

Non è sempre così ovvio quale sia la strada giusta per passare dal particolare al generale e, soprattutto, è chiaro il fatto che l'induzione non ha alcun fondamento logico: non c'è nessun motivo per cui una proprietà che vale in un caso o anche in diversi casi debba necessariamente valere per tutti i casi! Consideriamo la somma:

$S_n=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+......+\frac{1}{n*(n+1)}$ Cioè:

$$S_1=\frac{1}{1*2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}=\frac{4}{5}$$

................Eccetera. Cosa possiamo dire di S_n ? Guardando i quattro esempi precedenti,

$S_1=\frac{1}{2}$ $S_2=\frac{2}{3}$ $S_3=\frac{3}{4}$ $S_4=\frac{4}{5}$ sembrerebbe di poter dire che $S_n=\frac{n}{n+1}$

Bastano quattro verifiche per essere certi che la formula vale sempre?

Altro esempio:

$$S_1=1=1^2$$

$$S_2=1+3=2^2$$

$$S_3=1+3+5=3^2$$

$$S_4=1+3+5+7=4^2$$

$$S_5=1+3+5+7+9=5^2$$

Cioè la somma dei primi n numeri dispari sembra essere uguale a n^2 . Sarà così per tutti i valori di n?

Facciamo un altro esempio. Consideriamo il polinomio $P(n)=n^2+n+41$ se sostituiamo a n un numero naturale *qualsiasi* otteniamo *sempre* un numero primo.

P(1)=43 P(2)=47 P(3)=53 P(4)=61 P(5)=71 P(6)=83 P(7)=97 .... P(27)=797............??

Con un semplice ragionamento si può vedere che P(n) non dà sempre un numero primo, infatti P(41) certamente non è primo e non serve neanche calcolarlo. (P(41) è uguale a 43 volte 41)

Questo è un esempio meno semplice: una congettura sbagliata fatta da nientemeno che da Fermat!

Fermat, dopo aver verificato che $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$ e che $2^{2^4}+1=16537$ sono tutti numeri primi, congetturò infatti che tutti i numeri del tipo $2^{2^n}+1$ fossero numeri primi. Più tardi però Eulero trovò che $2^{2^5}+1$ è invece un numero composto!

$2^{2^5}+1$ = 4.294.967.297 = 641x6.700.417 ed è quindi composto!

Questo esempio è invece dovuto a Leibniz. Dopo aver dimostrato che n^3-n è divisibile per 3, n^5-n è divisibile per 5 e n^7-n per 7, Leibniz affermò che, per tutti i numeri dispari k, n^k-n è divisibile per *k.* Egli stesso però si accorse che $2^9-2=510$ non è divisibile per 9 e che la sua congettura era sbagliata.

Un ultimo esempio prima di entrare nel vivo della questione: se consideriamo il semplice binomio $991n^2+1$ troviamo che, qualsiasi sia il valore di n, non riusciamo mai a ottenere un quadrato perfetto. Possiamo passare tutta la vita a sostituire a *n* uno dopo l'altro milioni e milioni di numeri senza mai ottenere un quadrato perfetto. Ma ecco che se dopo miliardi di prove affermassimo che il binomio non è mai un quadrato perfetto commetteremmo un errore. Infatti si è trovato che c'è almeno un valore di *n* per cui si ottiene un quadrato! Questo succede per $n=12.055.735.790.331.359.447.442.538.767$.

Notate che non basta la migliore calcolatrice in commercio per verificarlo: occorre fare un programma al computer in cui usare ad esempio vettori di interi per rappresentare i numeri naturali. Oppure usare un linguaggio con una rappresentazione dinamica degli interi.

Insomma, non è detto che una proprietà che vale per decine, centinaia o addirittura miliardi di miliardi di casi particolari valga per tutti i casi! Esiste uno strumento matematico in grado di garantirci la validità di affermazioni ottenute per induzione?

Consideriamo la successione dei numeri naturali e immaginiamo che ogni numero generi il successivo. Ecco che allora abbiamo un capostipite, il numero 1, che è una specie di "Adamo" dei numeri, il quale genera il numero 2, che genera il 3, ecc. Diremo che una proprietà dei numeri naturali è *ereditaria* se si trasmette di padre in figlio, cioè da un numero al successivo. (Se Adamo aveva le orecchie a sventola e avere le orecchie a sventola è una caratteristica ereditaria, allora tutta l'umanità deve avere le orecchie a sventola. Se non le ha è o perché Adamo non le aveva, oppure perché tale caratteristica non è ereditaria.)

Il cosiddetto principio di induzione completa afferma che **se *una proprietà vale per il numero 1 ed è ereditaria allora vale per tutti i numeri.*** Il principio di induzione matematica fu enunciato per la prima volta da Augustus De Morgan nel 1838, ma i matematici l'avevano in realtà usato da sempre, senza sentire il bisogno di dichiararlo esplicitamente.

Torniamo a uno degli esempi visti prima: *la somma dei primi n numeri dispari è uguale a* n^2*.* Innanzitutto dobbiamo capire che questo enunciato descrive una proprietà dei numeri naturali che può essere quindi riferita a ciascun numero naturale: la somma dei primi 1 numeri dispari è uguale a 1^2*, è una proprietà del numero 1;* la somma dei primi 2 numeri dispari è uguale a 2^2*, è una proprietà del numero 2;* la somma dei primi 3 numeri dispari è uguale a 3^2*, è una proprietà* *del numero 3* e così via. Naturalmente ciascun numero naturale può avere o non avere questa proprietà e per ciascun numero naturale è possibile verificarla, per qualche numero potrebbe essere vera e per altri falsa. Dimostrare, per induzione, che questa proprietà vale per tutti i numeri naturali significa verificare che è vera per n=1 e che è ereditaria, cioè che se vale per un numero allora vale anche per il suo successore. (Il successore di n è n+1) Una dimostrazione per induzione di questa proprietà si svolge quindi in due passi, prima verificando che la proprietà vale per il numero 1 (passo base) e poi dimostrando che è ereditaria, cioè che se vale per un certo n allora vale anche per il suo successivo n+1 (passo induttivo).

Torniamo al nostro esempio, verificare che la proprietà vale per n=1 è immediato: la somma dei primi 1 numeri dispari è uguale 1^2*, cioè* $1 = 1^2$, vero! Questo è il passo base.

Ora, per il passo induttivo, dobbiamo verificare che se la proprietà è valida per il numero n, allora essa deve necessariamente valere anche per il successore di n, n+1. Abbiamo già visto che la somma dei primi n numeri dispari può essere così espressa: $1+3+5+......+2n-1$.

Supponiamo dunque che $1+3+5+......+2n-1=n^2$, poiché il numero dispari successivo a 2n-1 è 2n+1, compiere il passo induttivo significa dimostrare che da questa ipotesi possiamo dedurre che allora $1+3+5+......+2n-1+2n+1=(n+1)^2$ (ho aggiunto un numero dispari al primo membro e ho inchementato di uno n al secondo membro) cioè che la somma dei primi n+1 numeri dispari è uguale a $(n+1)^2$. La dimostrazione è molto semplice:

$1+3+5+......+2n-1=n^2$ per ipotesi. Sommando ad ambo i membri 2n+1 si ha

$1+3+5+......+2n-1+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$ che è quello che si voleva dimostrare.

Abbiamo mostrato che la proprietà vale per il numero 1 (passo base) e poi abbiamo dimostrato che la proprietà è ereditaria (passo induttivo) e quindi essa vale per tutti i numeri naturali. Possiamo quindi affermare che per qualunque numero naturale n, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.

Un altro esempio che abbiamo considerato all'inizio di questo capitolo è quello della somma

$$S_n=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+......+\frac{1}{n*(n+1)}$$

Dalle verifiche fatte "sembra" che tale somma sia uguale a $\frac{n}{n+1}$, cioè $S_n=\frac{n}{n+1}$. Abbiamo già fatto questa verifica per n=1, n=2, ...fino a n=4. Proviamo a dimostrare questa proprietà per induzione, così da essere certi che essa vale per ogni numero naturale.

Passo base: si tratta di verificare che $S_1=\frac{1}{2}$. Verifica immediata.

Passo induttivo: si tratta di dimostrare che se a $S_n=\frac{n}{n+1}$ allora $S_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$.

Esprimiamo esplicitamente S_{n+1} :

$$S_{n+1}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+......+\frac{1}{n*(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Abbiamo aggiunto a S_n il temine $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ successivo

Ma poiché $S_n=\frac{n}{n+1}$, si ha che $S_{n+1}=S_n+\frac{n+1}{n+2}$, quindi $S_{n+1}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+2}$, sviluppando la somma delle due frazioni, si ha .... $S_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$ come si voleva dimostrare.

Anche in questo caso abbiamo dimostrato che se

$$S_n=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+......+\frac{1}{n*(n+1)}$$

allora $S_n=\frac{n}{n+1}$. Cioè, per esempio, $S_{117}=\frac{117}{118}$.

Un altro importante esempio di dimostrazione per induzione è la regola di derivazione della funzione $y=x^n$, $D(x^n)=n*x^{n-1}$.

Passo base verificare che la formula funziona per n=1 (o per n=0). Verifica immediata!

Passo induttivo: far vedere che se la formula vale per un certo n, allora vale anche per n+1.

Supponiamo allora che $D(x^n)=n*x^{n-1}$ e calcoliamo $D(x^{n+1})$. I passaggi sono i seguenti:

$D(x^{n+1})=D(x*x^n)$ applicando la formula della derivata del prodotto $D(x*x^n)=1*x^n+x*n*x^{n-1}=x^n+n*x^n=(n+1)x^n$ Che è il valore che la formula dà per il valore n+1.

Questi sono solo alcuni esempi, ma il metodo di dimostrazione per induzione è di fondamentale importanza in matematica, come la dimostrazione indiretta (per assurdo) dà la possibilità di dimostrare teoremi di cui non è nota nessun'altra dimostrazione.